

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. **Определение и свойства определенного интеграла.** Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

На каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}),$$

которая называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Предел интегральной суммы при условии, что число частичных отрезков неограниченно увеличивается, а длина наибольшего из них стремится к нулю, называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ в пределах от $x=a$ до $x=b$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т. е. предел (1) существует и не зависит от способа разбиения промежутка интегрирования $[a, b]$ на частичные отрезки и от выбора точек ξ_i при каждом таком разбиении.

Основные свойства

$$1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$2) \int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)] dx = C_1 \int_a^b f_1(x) dx + C_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

(C_1 и C_2 — постоянные).

$$3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

где c — некоторая точка, лежащая внутри или вне отрезка $[a, b]$.

2. **Формула Ньютона — Лейбница.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и для нее известен неопределенный интеграл

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ (см. гл. VII, § 1), то определенный интеграл может быть вычислен по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2)$$

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

При вычислениях формулу (2) обычно пишут в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b,$$

где символ справа — «подстановка от a до b » — обозначает ту же самую разность $F(b) - F(a)$.

Применяя формулу Ньютона — Лейбница, вычислить следующие интегралы:

$$1366. \int_{-1}^2 x^2 dx.$$

$$\text{Решение. } \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

$$1367. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx.$$

Решение. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) d \cos x =$
 $= \left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \frac{\cos^3 \frac{\pi}{2}}{3} \right) - \left(-\cos 0 + \frac{\cos^3 0}{3} \right) = \frac{2}{3}.$

$$1368. \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}}.$$

Решение. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{d \ln x}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}} = \arcsin \ln x \Big|_1^{\sqrt{e}} =$
 $= \arcsin \ln \sqrt{e} - \arcsin \ln 1 = \arcsin \frac{1}{2} - \arccos 0 = \frac{\pi}{6}.$

§ 2. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Замена переменной. Часто для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) \, dx$ полезно заменить переменную интегрирования x новой переменной t при помощи подстановки $x = \varphi(t)$ или $t = \psi(x)$. При этом необходимо перейти от старых пределов интегрирования a и b к новым пределам α и β , которые определяются из уравнений

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta).$$

Замена переменной осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt. \quad (1)$$

Эта формула справедлива, в частности, если $f(x)$ — непрерывная функция, а подстановка $x = \varphi(t)$ сама непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$. Подчеркнем, что при вычислении определенного интеграла методом замены переменной в отличие от неопределенного интегрирования возврат к старой переменной не требуется.

В следующих задачах с помощью подходящих подстановок вычислить интегралы:

$$1379. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

Решение. Переходим к новой переменной интегрирования, полагая $x = t^2$ ($t > 0$). При $x = 0$ получаем $t = 0$, а при $x = 4$ — $t = 2$; поэтому в соответствии с формулой (1) имеем

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t \, dt}{1 + t} = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2(t - \ln |1+t|) \Big|_0^2 = 4 - 2 \ln 3.$$

$$1380. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx.$$

Решение. Положим $x = 2 \sin t$. Такая подстановка возможна (так как при любом значении t под корнем получается неотрицательная величина) и приводит к тому, что корень под знаком интеграла исчезает. При этом изменению переменной x от $x = 0$ до $x = 1$ соответствует изменение переменной t от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{6}$. Применяя формулу (1), получаем

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t \, dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t \, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) \, dt = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ обладают непрерывными производными на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула интегрирования по частям для определенного интеграла:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad (3)$$

1391. $\int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx.$

Решение. Положим $\operatorname{arctg} x = u$, $x dx = dv$, тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Подставляя полученные значения в формулу (3), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) \Big|_0^3 = 5 \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

1392. $\int_1^e (1 + \ln x)^2 dx.$

Решение. Полагаем $u = (1 + \ln x)^2$, $dv = dx$, откуда

$$du = 2(1 + \ln x) \frac{dx}{x}, \quad v = x,$$

а поэтому

$$J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx = x(1 + \ln x)^2 \Big|_1^e - 2 \int_1^e (1 + \ln x) dx.$$

К последнему интегралу применим еще раз формулу (3), положив $u = 1 + \ln x$, $dv = dx$ и $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$;

$$J = x(1 + \ln x)^2 \Big|_1^e - 2 \left[x(1 + \ln x) \Big|_1^e - \int_1^e dx \right] = 2e - 1.$$

§ 5. ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР

1. Вычисление площади в прямоугольных координатах. Если непрерывная кривая задана уравнением

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0),$$

то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикальными в точках $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$ (рис. 147), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

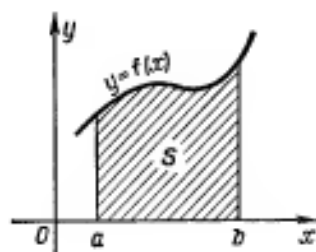


Рис. 147

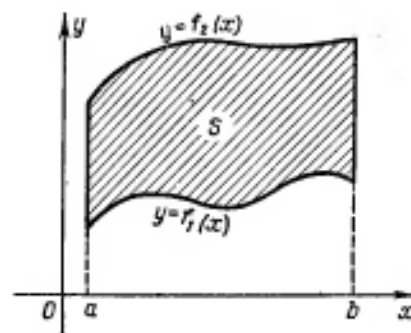


Рис. 148

Если площадь S ограничена двумя непрерывными кривыми

$$y=f_1(x) \text{ и } y=f_2(x)$$

и двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$, где $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $a \leq x \leq b$ (рис. 148), то

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (2)$$

В случае параметрического задания кривой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \psi'(t) dt, \quad (3)$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = \varphi(t_1)$ и $b = \varphi(t_2)$ ($\psi(t) \geq 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$).

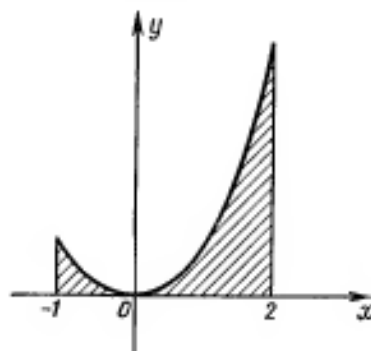


Рис. 149

1445. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = x^2$, прямыми $x = -1$ и $x = 2$ и осью абсцисс (рис. 149).

Решение. Искомая площадь вычисляется по формуле (1):

$$S = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = 3.$$

1446. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $y = 2x - x^2$.

Решение. Методом выделения полных квадратов приведем уравнение параболы к виду

$$y - 1 = -(x - 1)^2;$$

отсюда видно, что парабола симметрична относительно прямой $x = 1$, ветвями направлена вниз и вершина ее лежит в точке $(1, 1)$ (рис. 150). Совместным решением уравнений параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$ определяем абсциссы точек A и B : $x_A = 0$, $x_B = 3$.

Теперь по формуле (2) вычисляем искомую площадь сегмента при $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = 2x - x^2$, $a = 0$, $b = 3$:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)] dx = \\ &= \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

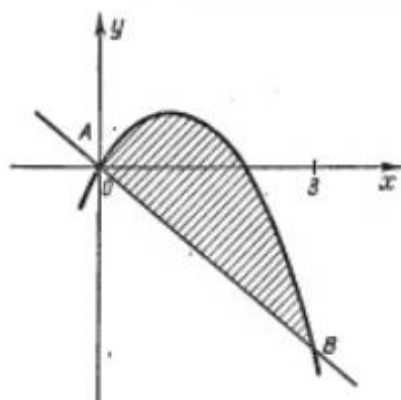


Рис. 150

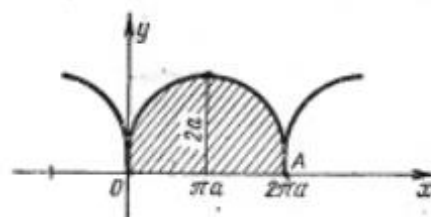


Рис. 151

1447. Найти площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и отрезком оси абсцисс (рис. 151).

Решение. Точкам O и A соответствуют значения параметра $t_0 = 0$ и $t_A = 2\pi$, поэтому по формуле (3) искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) [a(t - \sin t)]' dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$